Escola d'Enginyeria de Telecomunicació i Aeroespacial de Castelldefels
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Flight Mechanics (MV)

LECCION 1: Introducción a la Mecánica del Vuelo de Aviones

Santiago Arias

Santiago.arias@upc.edu

Edificio C3, Office 120

Indice

1. Introducción
2. Sistemas de referencia
3. Orientación entre dos sistemas
4. Relaciones dinámicas
5. Acciones externas
6. Relaciones cinemáticas angulares
7. Relaciones cinemáticas lineales
8. Discusión general del sistema
9. Casos particulares

Sistema Eqs. General

1. Introducción

Mecánica del Vuelo: ciencia aplicada que se ocupa del estudio del movimiento de los vehículos voladores

Grandes movimientos:

- **Actuaciones**: movimiento del centro de masas del avión a través de su trayectoria
- **Estabilidad y control**: rotaciones alrededor del centro de masas (sólido rígido; posibles cuerpos sólidos unidos)

Pequeños movimientos

- **Aeroelasticidad**: deformaciones elásticas de la estructura

1. Introducción

Problemas analizados:

Actuaciones (Performances):

- De punto problemas locales de la trayectoria
- Integrales problemas globales de la trayectoria

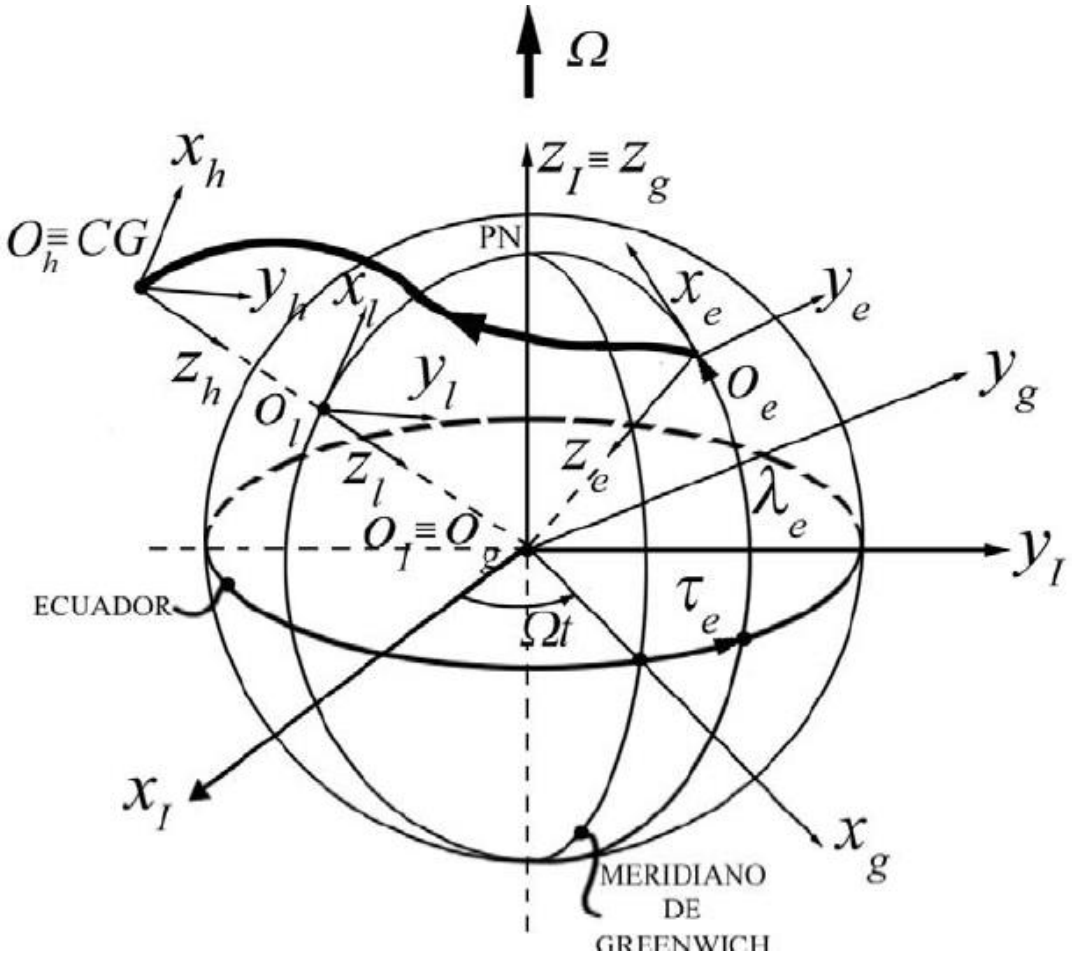
Estabilidad y control (Cualidades de Vuelo):

- Estáticos
- Dinámicos

2. Sistemas de referencia

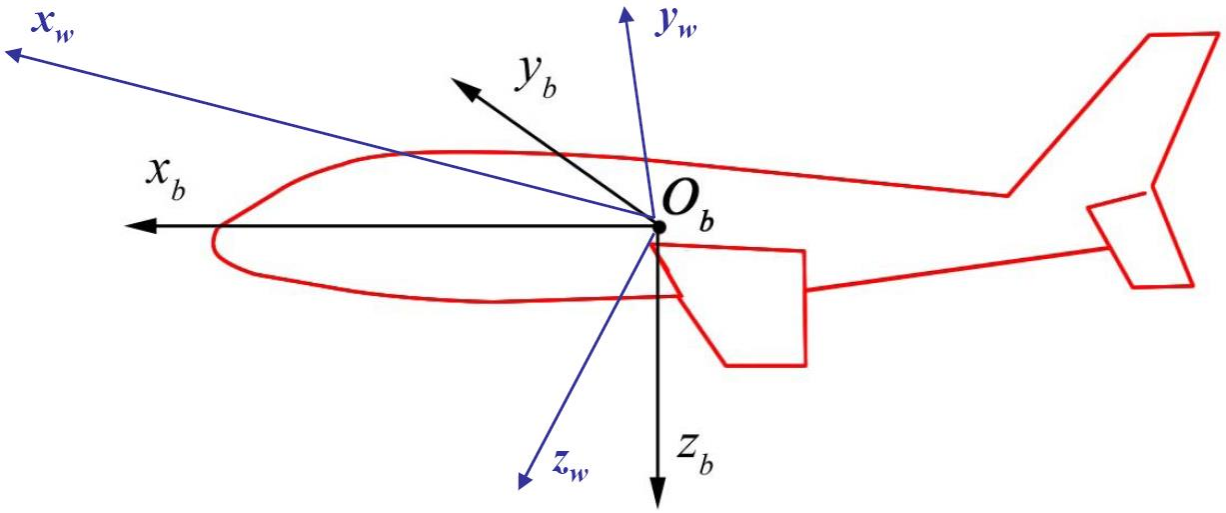
6 sistemas ampliamente utilizados: $F_i(O_i,x_i,y_i,z_i)$

- Referencia inercial (i=I)
- Referencia geocéntrico (i=g)
- Ejes tierra (i=e)
- **Ejes horizonte local (i=h)**
- **Ejes cuerpo (i=b)**
- **Ejes viento (i=w)**



2. Sistemas de referencia

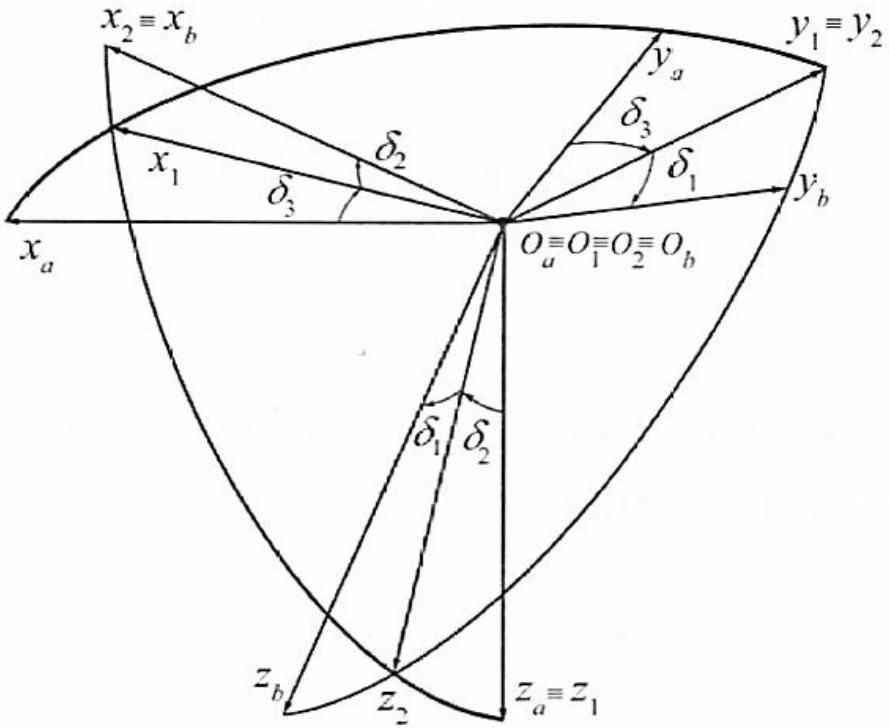
- **Ejes cuerpo (i=b)**
- **Ejes viento (i=w)**



- **Es crucial conocer las orientaciones entre los ejes horizonte local, cuerpo y viento**

3. Orientación entre dos sistemas

- **Origen común → realizar una rotación hasta hacer coincidir los ejes**
- **Distintos métodos: Ángulos de Euler (3 rotaciones finitas alrededor de 3 ejes en un orden especificado)**
- **Convención zyx, 321, o Tait-Bryan (aeronaves y vehículos espaciales)**



3. Orientación entre dos sistemas

- **Para expresar un vector $\vec{A}$ en el sistema F_b conociendo sus componentes en F_a: matriz de transformación o rotación**

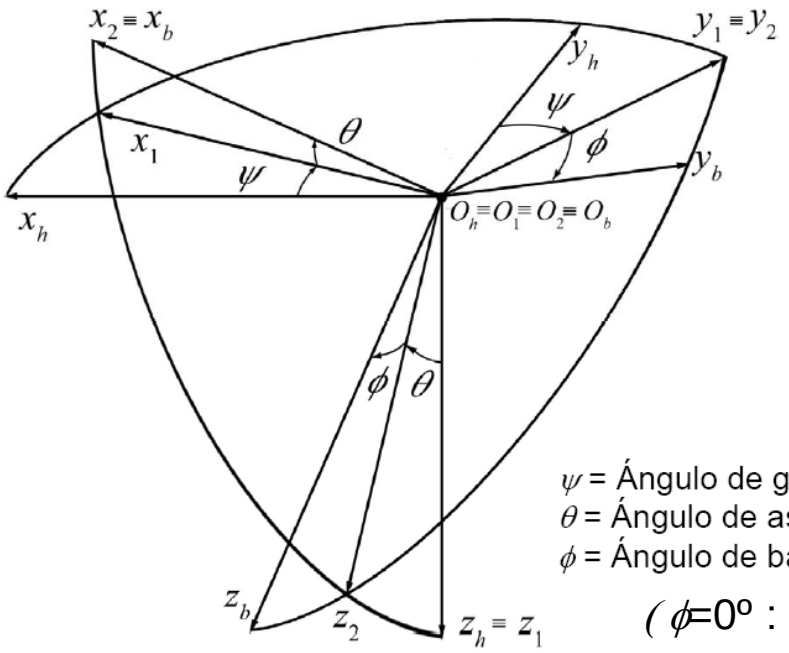
$$\vec{A}_b = L_{ba}\vec{A}_a$$

$$L_{ba} = L_{b2}L_{21}L_{1a} = R_1R_2R_3$$

$$L_{ba} = \begin{bmatrix} c\delta_2 c\delta_3 & c\delta_2 s\delta_3 & -s\delta_2 \\ s\delta_1 s\delta_2 c\delta_3 - c\delta_1 s\delta_3 & s\delta_1 s\delta_2 s\delta_3 + c\delta_1 c\delta_3 & s\delta_1 c\delta_2 \\ c\delta_1 s\delta_2 c\delta_3 + s\delta_1 s\delta_3 & c\delta_1 s\delta_2 s\delta_3 - s\delta_1 c\delta_3 & c\delta_1 c\delta_2 \end{bmatrix}$$

$$L_{ab} = L_{ba}^{-1} = L_{ba}^{T} \qquad \left(\left|L_{ab}\right| = 1\right)$$

3. Orientación entre F_b y F_h



$$\delta_1 = \phi$$

$$\delta_2 = \theta$$

$$\delta_3 = \psi$$

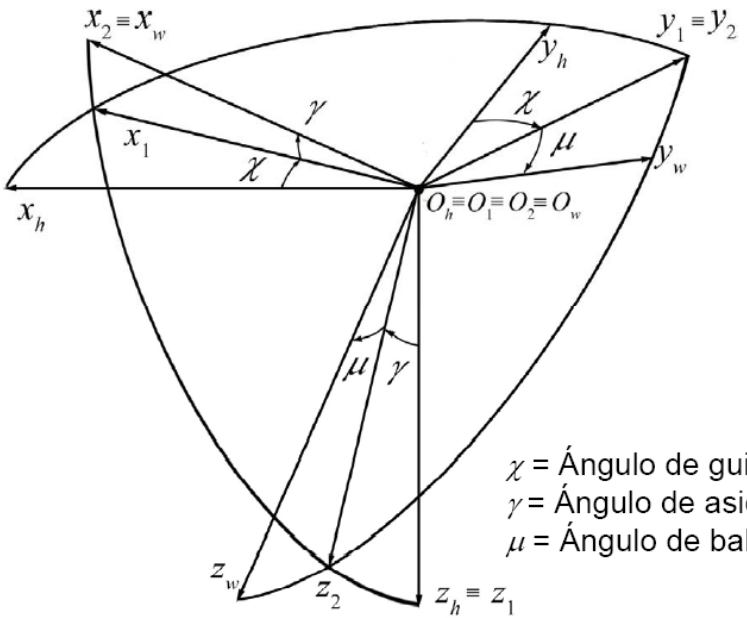
ψ = Ángulo de guiñada del avión ($0 \le \psi < 2\pi$)
θ = Ángulo de asiento del avión ($-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$)
ϕ = Ángulo de balance del avión ($0 \le \phi < 2\pi$)

(ϕ=0º : vuelo a nivel)

$$\vec{A}_b = L_{bh}\vec{A}_h$$

$$L_{bh} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi & -\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta\cos\psi - \cos\phi\sin\psi & \sin\phi\sin\theta\sin\psi + \cos\phi\cos\psi & \sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi\sin\theta\cos\psi + \sin\phi\sin\psi & \cos\phi\sin\theta\sin\psi - \sin\phi\cos\psi & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix}$$

3. Orientación entre F_W y F_h



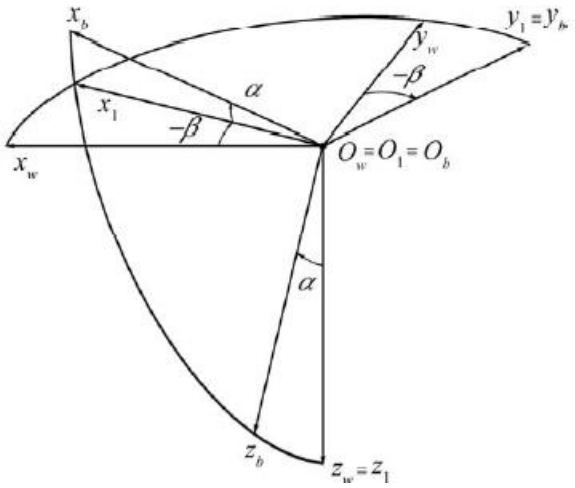
$$\delta_1 = \mu$$
$$\delta_2 = \gamma$$
$$\delta_3 = \chi$$

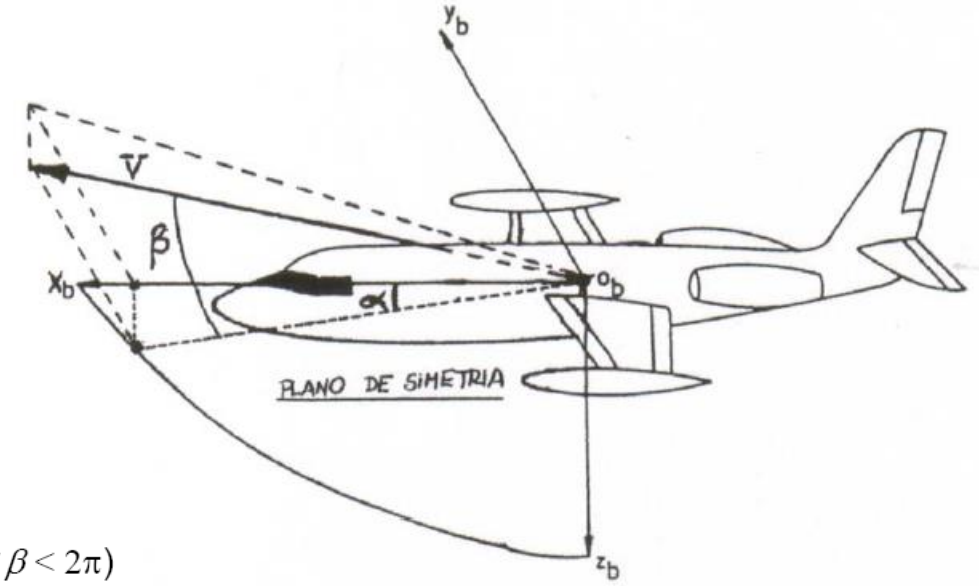
χ = Ángulo de guiñada de velocidad ($0 \le \chi < 2\pi$)
γ = Ángulo de asiento de velocidad ($-\pi/2 \le \gamma \le \pi/2$)
μ = Ángulo de balance de velocidad ($0 \le \mu < 2\pi$)

$$\vec{A}_w = L_{wh}\vec{A}_h$$

$$L_{wh} = \begin{bmatrix} \cos\gamma\cos\chi & \cos\gamma\sin\chi & -\sin\gamma \\ \sin\mu\sin\gamma\cos\chi - \cos\mu\sin\chi & \sin\mu\sin\gamma\sin\chi + \cos\mu\cos\chi & \sin\mu\cos\gamma \\ \cos\mu\sin\gamma\cos\chi + \sin\mu\sin\chi & \cos\mu\sin\gamma\sin\chi - \sin\mu\cos\chi & \cos\mu\cos\gamma \end{bmatrix}$$

3. Orientación entre F_b y F_w





β = Ángulo de resbalamiento ($0 \le \beta < 2\pi$)

α = Ángulo de ataque ($-\pi/2 \le \alpha \le \pi/2$)

$$\delta_1 = 0^o$$

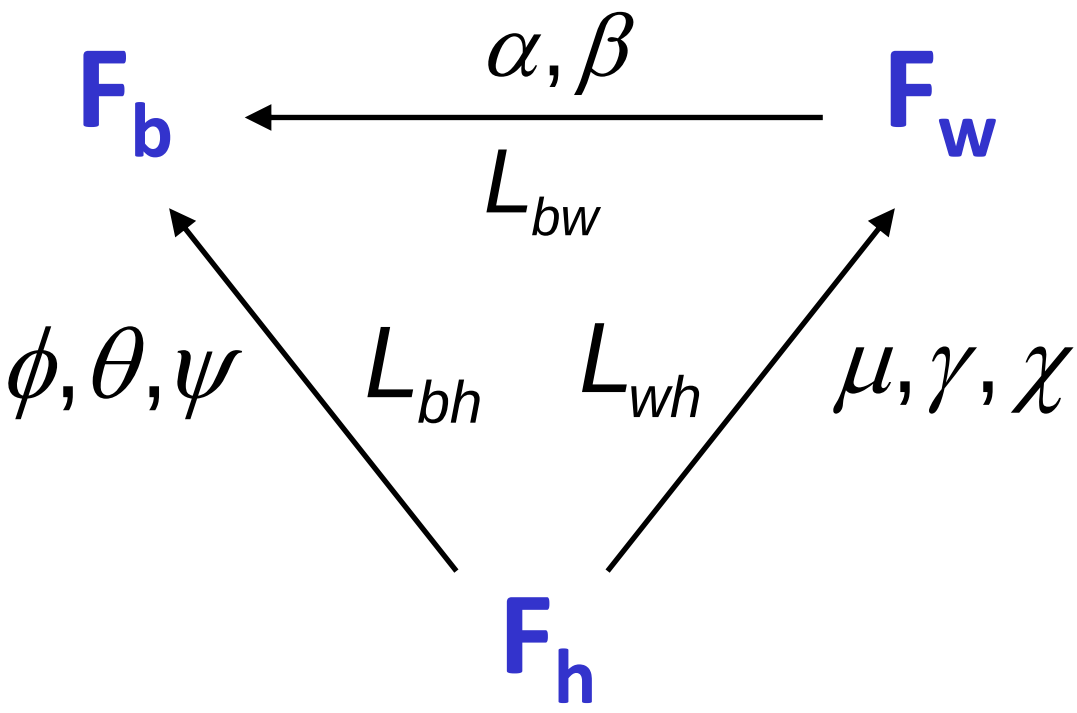
$$\delta_2 = \alpha$$

$$\delta_3 = -\beta$$

$$\vec{A}_b = L_{bw}\vec{A}_w$$

$$L_{bw} = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

3. Orientación entre F_b, F_w y F_h



- **Los 3 sistemas de referencia están relacionados entre sí**
- **Por ejemplo:** $L_{bw} = L_{bh} L_{hw}$ o $L_{bh} = L_{bw} L_{wh}$ o $L_{wh} = L_{wb} L_{bh}$

4. Relaciones dinámicas

- **Teorema de la cantidad de movimiento:**

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{V})}{\mathrm{d}t}$$

$\vec{F}$	Resultante de las fuerzas exteriores
$\vec{V}$	Velocidad absoluta del centro de masas del avión
m	Masa del avión ($m = W/g$, siendo W el peso y g la aceleración de la gravedad)
t	Tiempo

4. Relaciones dinámicas

- **Teorema del momento cinético:**

$$\vec{G} = \frac{\mathrm{d}\vec{h}}{\mathrm{d}t} \qquad \vec{h} = I\vec{\omega}$$

$\vec{G}$	Resultante de los momentos exteriores alrededor del centro de masas
$\vec{h}$	Momento cinético total del avión
$\vec{\omega}$	Velocidad angular absoluta del avión
I	Tensor de inercia del avión

$$I = \begin{bmatrix} I_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & I_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & I_z \end{bmatrix}$$

I_x, I_y, I_z	momentos de inercia alrededor de los tres ejes
J_{xy}, J_{xz}, J_{yz}	productos de inercia

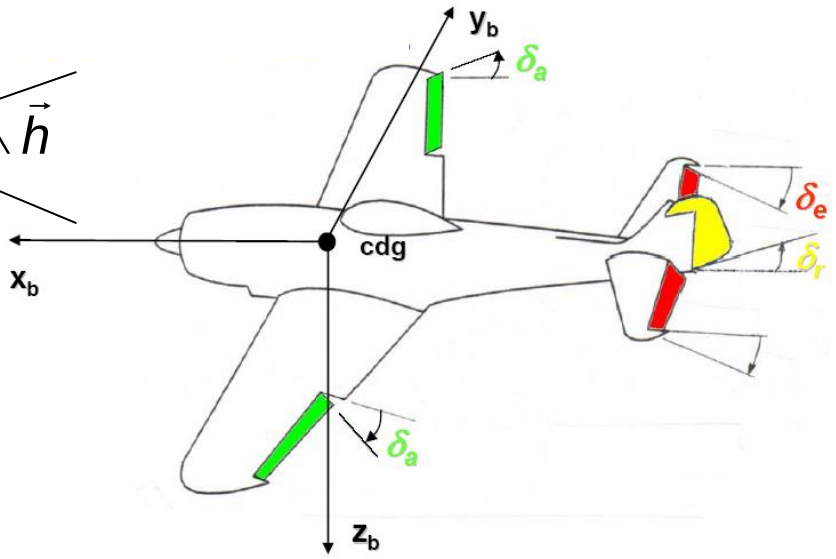
4. Relaciones dinámicas

- **Proyectando en ejes viento:**

$$\vec{F} = m\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}\right)$$

$$\vec{G} = \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} + \vec{\omega} \wedge \vec{h}$$

$$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)^T$$
$$\vec{G} = (L_w, M_w, N_w)^T$$
$$\vec{V} = (V, 0, 0)^T$$
$$\vec{\omega} = (p_w, q_w, r_w)^T$$



- **Ecuaciones del movimiento – Actuaciones:**

$$F_x = m\dot{V}$$
$$F_y = mr_wV$$
$$F_z = -mq_wV$$

5. Acciones externas

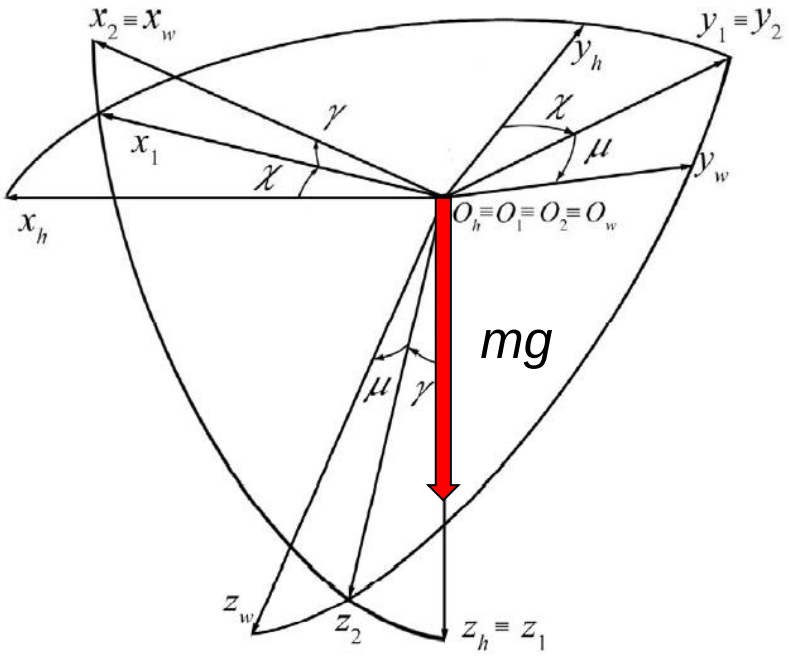
- **Se descomponen en aerodinámicas, propulsivas y gravitatorias:**

$$\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_T + \vec{F}_G$$

- **Las fuerzas gravitatorias pueden expresarse como:**

$$\left(\vec{F}_G\right)_h = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{Bmatrix}$$

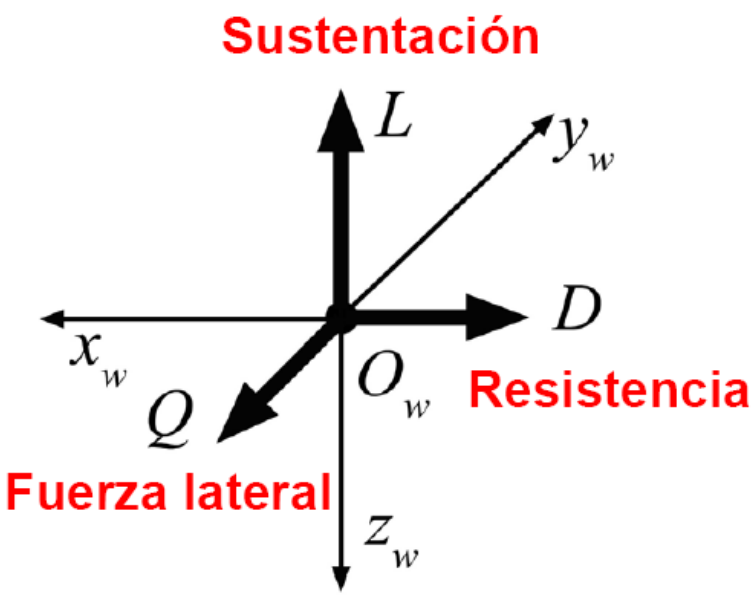
$$\left(\vec{F}_G\right)_w = L_{wh} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{Bmatrix} = mg \begin{Bmatrix} -\sin\gamma \\ \cos\gamma \sin\mu \\ \cos\gamma \cos\mu \end{Bmatrix}$$

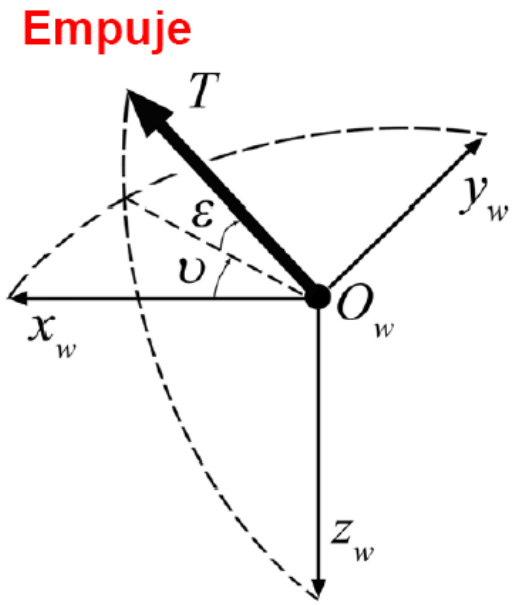


5. Acciones externas

- **Las fuerzas aerodinámicas y propulsivas pueden expresarse como**

$$\vec{F}_A = \begin{Bmatrix} -D \\ -Q \\ -L \end{Bmatrix} \qquad \vec{F}_T = \begin{Bmatrix} T\cos\varepsilon\cos\upsilon \\ T\cos\varepsilon\sin\upsilon \\ -T\sin\varepsilon \end{Bmatrix}$$





ε = Angulo ataque del empuje

ν = Ángulo resbalamiento del empuje

6. Relaciones cinemáticas angulares

- **Necesitamos conocer la velocidad angular absoluta de los ejes viento**
- **Utilizamos la hipótesis de tierra plana:**

$$\vec{\omega}_{wI} = \vec{\omega}_{we} + \vec{\omega}_{eg} + \vec{\omega}_{gI} \approx \vec{\omega}_{we} = \vec{\omega}_{wh} + \vec{\omega}_{he} \approx \vec{\omega}_{wh}$$

$$\begin{Bmatrix} p_w \\ q_w \\ r_w \end{Bmatrix} = \vec{\omega}_{wI} \approx \vec{\omega}_{wh} = \dot{\mu}\vec{i}_w + \dot{\gamma}\vec{j}_1 + \dot{\chi}\vec{k}_h = \dot{\mu}\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \dot{\gamma}\begin{Bmatrix} 0 \\ \cos\mu \\ -\sin\mu \end{Bmatrix} + \dot{\chi}\begin{Bmatrix} -\sin\gamma \\ \sin\mu\cos\gamma \\ \cos\mu\cos\gamma \end{Bmatrix}$$

$$\vec{j}_1\Big|_w = L_{wh}\,\vec{j}_1\Big|_h = L_{wh}L_{h1}\vec{j}_1$$

$$p_w = \dot{\mu} - \dot{\chi}\sin\gamma$$

$$q_w = \dot{\gamma}\cos\mu + \dot{\chi}\cos\gamma\sin\mu$$

$$r_w = -\dot{\gamma}\sin\mu + \dot{\chi}\cos\gamma\cos\mu$$

7. Relaciones cinemáticas lineales

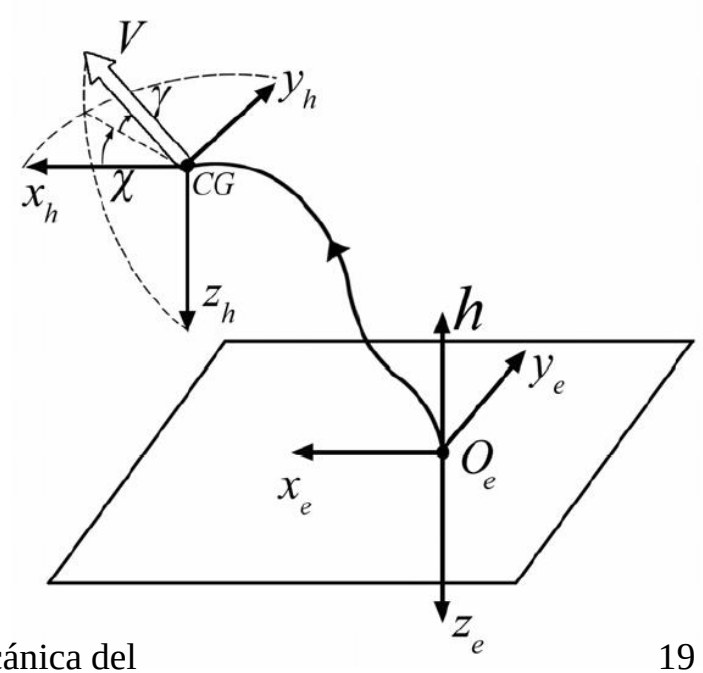
- **Estas ligaduras cinemáticas representan a la trayectoria:**

$$\vec{V}_e = \begin{Bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{z}_e \end{Bmatrix} = L_{hw}\vec{V}_w = L_{hw}\begin{Bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = L_{wh}{}^{T}\begin{Bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = V\begin{Bmatrix} \cos\gamma\cos\chi \\ \cos\gamma\sin\chi \\ -\sin\gamma \end{Bmatrix}$$

$$\dot{x}_e = V\cos\gamma\cos\chi$$
$$\dot{y}_e = V\cos\gamma\sin\chi$$
$$\dot{z}_e = -V\sin\gamma$$

$$ROC = -\dot{z}_e = \dot{h} = V\sin\gamma$$

(Rate Of Climb)



8. Discusión general del sistema

- **El movimiento de translación del avión viene descrito por 7 ecuaciones**
- **3 ecuaciones dinámicas de fuerzas**

$$T\cos\varepsilon\cos\nu - D - mg\sin\gamma - m\dot{V} = 0$$

$$T\cos\varepsilon\sin\nu - Q + mg\cos\gamma\sin\mu + mV(\dot{\gamma}\sin\mu - \dot{\chi}\cos\gamma\cos\mu) = 0$$

$$-T\sin\varepsilon - L + mg\cos\gamma\cos\mu + mV(\dot{\gamma}\cos\mu + \dot{\chi}\cos\gamma\sin\mu) = 0$$

+

- **3 ecuaciones cinemáticas lineales**

$$\dot{x}_e = V\cos\gamma\cos\chi$$

$$\dot{y}_e = V\cos\gamma\sin\chi$$

$$\dot{z}_e = -V\sin\gamma$$

+

- **1 ecuación de conservación de la masa**

(φ: gasto másico)

$$\dot{m} + \varphi = 0$$

8. Discusión general del sistema

- **Evaluación de las características aerodinámicas y propulsivas**

$$\left.\begin{aligned} D &= D(h,V,\alpha,\beta,\varepsilon,\upsilon,\pi) \\ Q &= Q(h,V,\alpha,\beta,\varepsilon,\upsilon,\pi) \\ L &= L(h,V,\alpha,\beta,\varepsilon,\upsilon,\pi) \\ T &= T(h,V,\alpha,\beta,\varepsilon,\upsilon,\pi) \\ \varphi &= \varphi(h,V,\alpha,\beta,\varepsilon,\upsilon,\pi) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} D &= D(h,V,\alpha,\beta) \\ Q &= Q(h,V,\alpha,\beta) \\ L &= L(h,V,\alpha,\beta) \\ T &= T(h,V,\pi) \\ \varphi &= \varphi(h,V,\pi) \end{aligned}$$

π **: parámetro de control del empuje**

- **7 ecuaciones**
- **1 variable independiente: *t***
- **13 variables dependientes o incógnitas:** $x_e, y_e, h, V, \chi, \gamma, m$

(parámetros de control) $\alpha, \beta, \mu, \varepsilon, \upsilon, \pi$

- **6 grados de libertad matemáticos (13-7)**
- **Si** $\alpha, \beta, \mu, \varepsilon, \upsilon, \pi$ **son conocidos (u otras 6), el problema queda cerrado**

9. Casos particulares:

Vuelo simétrico en un plano vertical

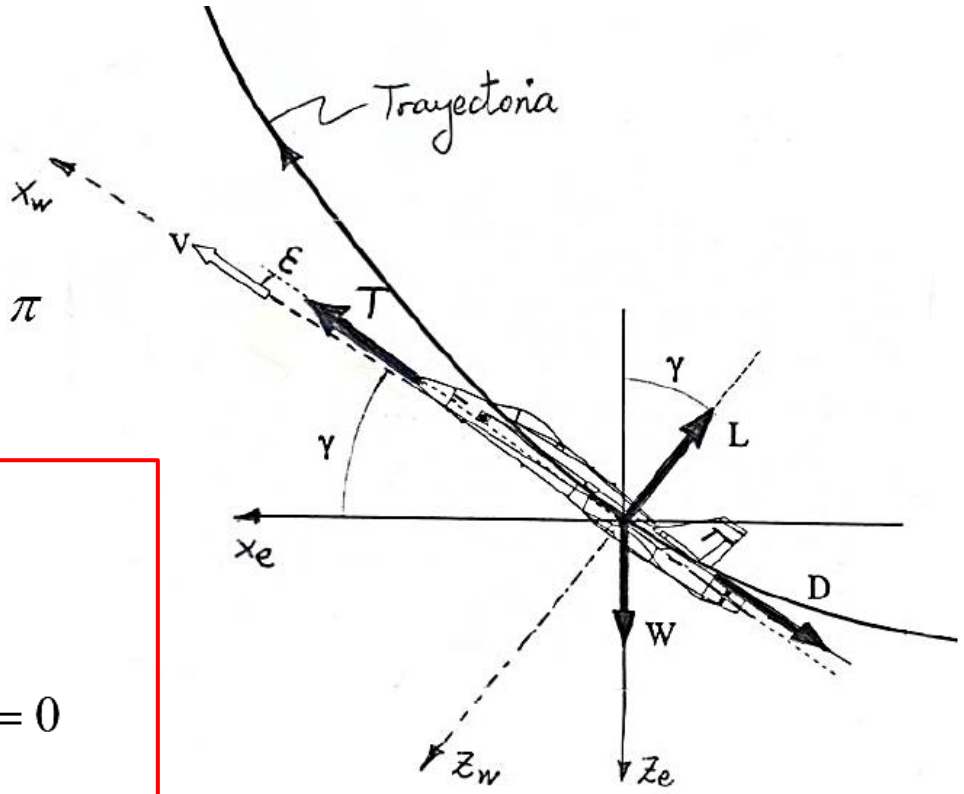
Vuelo simétrico: $\beta = \upsilon = 0$

$Q \cong 0$

Plano vertical: $y_e = 0$

$\dot{y}_e = V \cos\gamma \sin\chi = 0 \rightarrow \chi = 0$

Alas a nivel: $\mu = 0$



$$\dot{x}_e = V\cos\gamma$$

$$\text{ROC} = \dot{h} = V\sin\gamma$$

$$T\cos\varepsilon - D - mg\sin\gamma - m\dot{V} = 0$$

$$-T\sin\varepsilon - L + mg\cos\gamma + mV\dot{\gamma} = 0$$

$$\dot{m} + \varphi = 0$$

9. Casos particulares:

Vuelo simétrico en un plano vertical

- **5 ecuaciones**
- **1 variable independiente: *t***
- **8 variables dependientes o incógnitas:**
  - **5 variables de estado:** x_e, h, V, γ, m
  - **3 variables de control:** α, ε, π
- **3 grados de libertad matemáticos**

$$\dot{x}_e = V\cos\gamma$$

$$\mathrm{ROC} = \dot{h} = V\sin\gamma$$

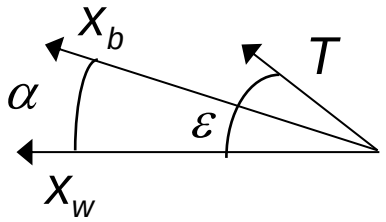
$$T\cos\varepsilon - D - mg\sin\gamma - m\dot{V} = 0$$

$$-T\sin\varepsilon - L + mg\cos\gamma + mV\dot{\gamma} = 0$$

$$\dot{m} + \varphi = 0$$

- **Es posible controlar el avión con el timón de profundidad, el ángulo de ataque del empuje y el parámetro de control del empuje.**

- **Motor fijo respecto a la estructura:** $\varepsilon - \alpha = cte$
- **El sistema pasa a tener 2 grados de libertad (con 2 variables de control:** α, π**)**



9. Casos particulares:

Vuelo simétrico en un plano vertical

Vuelo rectilíneo o casi-rectilíneo

Fuerza de inercia normal a la trayectoria nula o despreciable frente a otras fuerzas

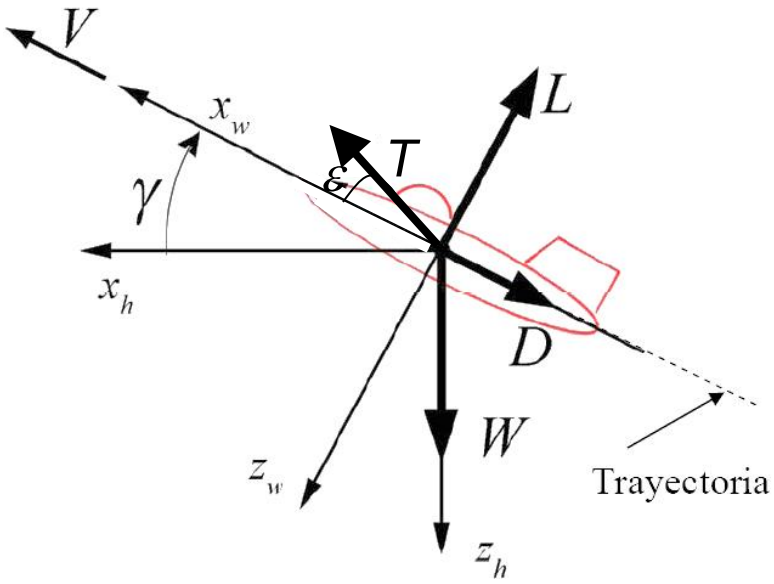
$$\dot{x}_e = V\cos\gamma$$

$$\mathrm{ROC} = \dot{h} = V\sin\gamma$$

$$T\cos\varepsilon - D - mg\sin\gamma - m\dot{V} = 0$$

$$-T\sin\varepsilon - L + mg\cos\gamma + \cancel{mV\dot{\gamma}} = 0$$

$$\dot{m} + \varphi = 0$$



- **5 variables de estado:** x_e, h, V, γ, m
- **2 variables de control:** α, π

9. Casos particulares:

Vuelo simétrico en un plano vertical

Vuelo rectilíneo o casi-rectilíneo + estacionario o casi-estacionario

Fuerza de inercia normal + tangencial a la trayectoria nula o despreciable frente a otras fuerzas

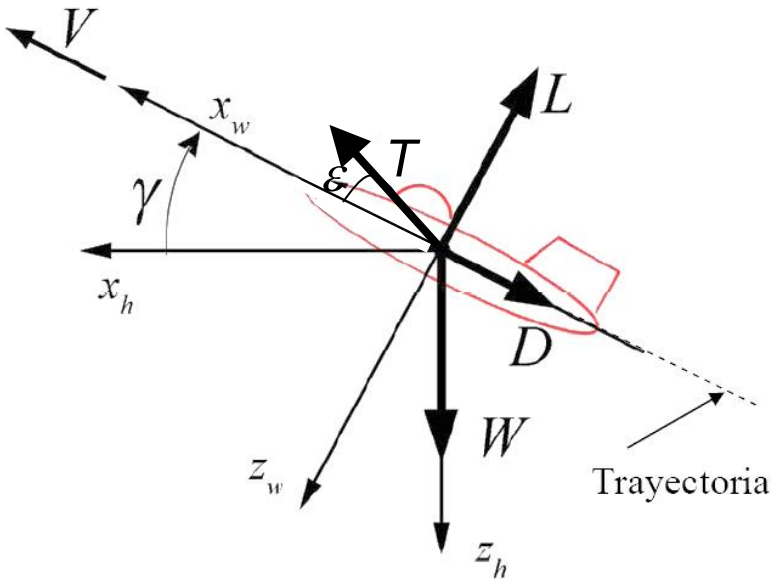
$$\dot{x}_e = V\cos\gamma$$

$$\mathrm{ROC} = \dot{h} = V\sin\gamma$$

$$T\cos\varepsilon - D - mg\sin\gamma - \cancel{m\dot{V}} = 0$$

$$-T\sin\varepsilon - L + mg\cos\gamma + \cancel{mV\dot{\gamma}} = 0$$

$$\dot{m} + \varphi = 0$$



- **5 variables de estado:** x_e, h, V, γ, m
- **2 variables de control:** α, π

9. Casos particulares:

Vuelo simétrico en un plano vertical

Vuelo rectilíneo o casi-rectilíneo + estacionario o casi-estacionario

Incluyendo la hipótesis de ángulo de ataque del empuje igual a cero

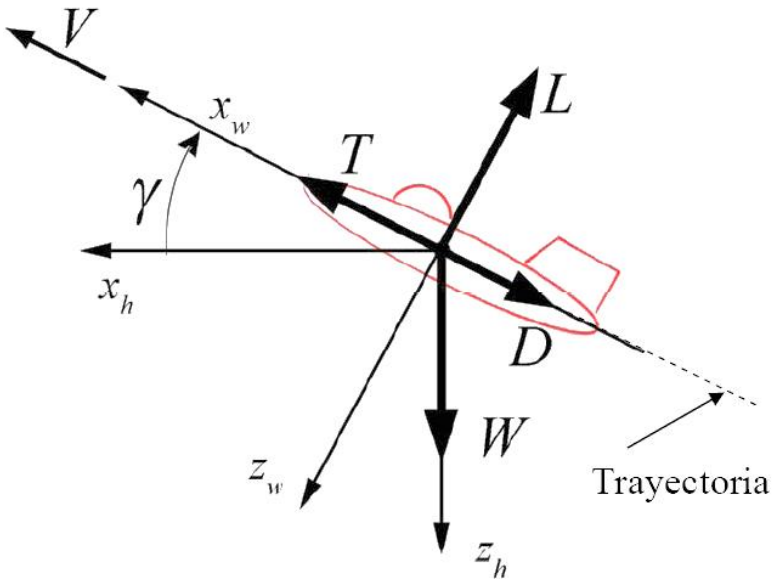
$$\dot{x}_e = V\cos\gamma$$

$$\mathrm{ROC} = \dot{h} = V\sin\gamma$$

$$T\cancel{\cos\varepsilon} - D - mg\sin\gamma - \cancel{m\dot{V}} = 0$$

$$\cancel{-T\sin\varepsilon} - L + mg\cos\gamma + \cancel{mV\dot{\gamma}} = 0$$

$$\dot{m} + \varphi = 0$$



- **5 variables de estado:** x_e, h, V, γ, m
- **2 variables de control:** α, π

9. Casos particulares:

Vuelo simétrico en un plano vertical

Vuelo rectilíneo o casi-rectilíneo + estacionario o casi-estacionario

Incluyendo la hipótesis de ángulo de ataque del empuje igual a cero

Vuelo horizontal: $\gamma = 0$

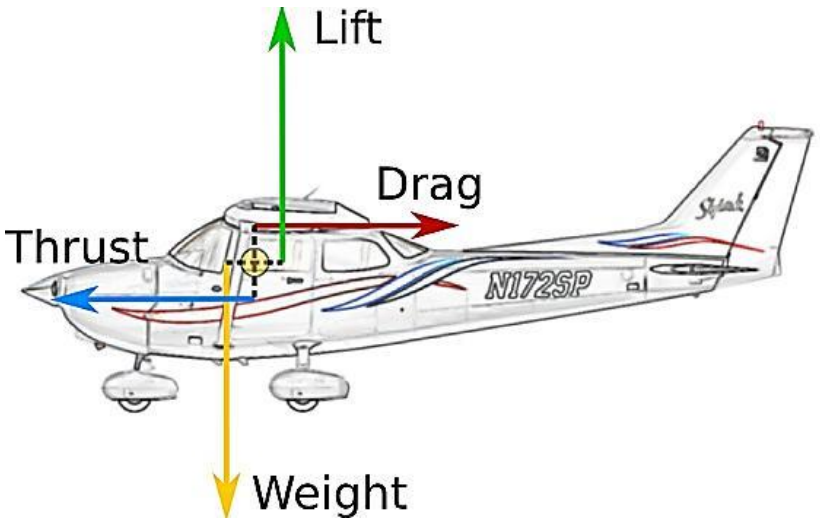
$$\dot{x}_e = V \cancel{\cos\gamma}$$

$$\text{ROC} = \cancel{\dot{h} = V \sin\gamma}$$

$$T \cancel{\cos\varepsilon} - D - \cancel{mg \sin\gamma} - \cancel{m\dot{V}} = 0$$

$$\cancel{-T \sin\varepsilon} - L + mg \cancel{\cos\gamma} + \cancel{mV\dot{\gamma}} = 0$$

$$\dot{m} + \varphi = 0$$



- **3 variables de estado:** x_e, V, m
- **2 variables de control:** α, π

9. Casos particulares:

Vuelo simétrico en un plano horizontal

Vuelo simétrico: $\beta = \upsilon = 0$

$Q \cong 0$

Plano vertical: $h = cte$

$\dot{h} = V \sin\gamma = 0 \rightarrow \gamma = 0$

$$\dot{x}_e = V\cos\chi$$

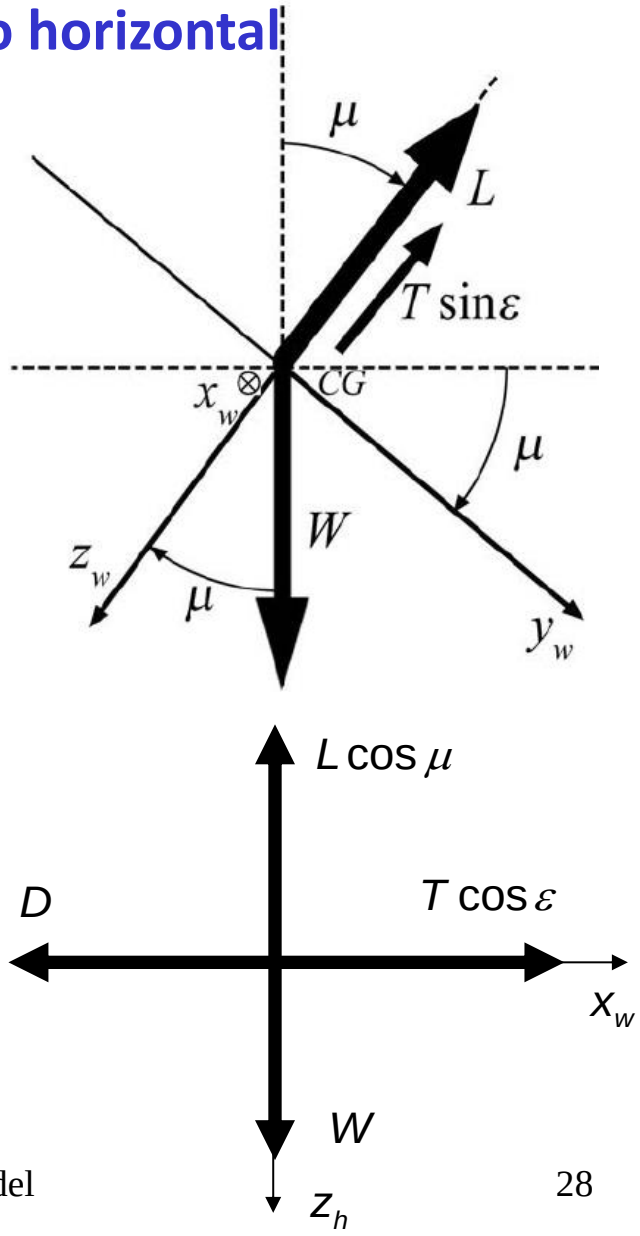
$$\dot{y}_e = V\sin\chi$$

$$T\cos\varepsilon - D = m\dot{V}$$

$$L\sin\mu + T\sin\varepsilon\sin\mu = mV\dot{\chi}$$

$$W - L\cos\mu - T\sin\varepsilon\cos\mu = 0$$

$$\dot{m} + \varphi = 0$$



(Nota: las ecs. dinámicas están proyectadas en los ejes intrínsecos de la trayectoria, no en los ejes viento)

9. Casos particulares:

Vuelo simétrico en un plano horizontal

- **6 ecuaciones**
- **1 variable independiente: *t***
- **9 variables dependientes o incógnitas:**
  - **5 variables de estado:** x_e, y_e, V, χ, m
  - **4 variables de control:** $\alpha, \mu, \varepsilon, \pi$
- **3 grados de libertad matemáticos**

$$\dot{x}_e = V\cos\chi$$

$$\dot{y}_e = V\sin\chi$$

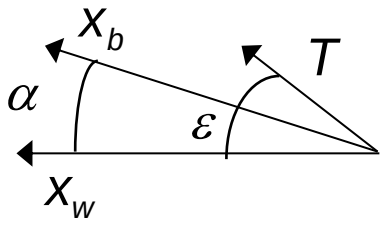
$$T\cos\varepsilon - D = m\dot{V}$$

$$L\sin\mu + T\sin\varepsilon\sin\mu = mV\dot{\chi}$$

$$W - L\cos\mu - T\sin\varepsilon\cos\mu = 0$$

$$\dot{m} + \varphi = 0$$

- **Es posible controlar el avión con el timón de profundidad, el ángulo de ataque del empuje y el parámetro de control del empuje (y los alerones, dependientes de los 3 anteriores).**
- **Motor fijo respecto a la estructura:** $\varepsilon - \alpha = cte$
- **El sistema pasa a tener 2 grados de libertad (con 3 variables de control:** α, μ, π **)**



9. Casos particulares:

Vuelo simétrico en un plano horizontal

Vuelo estacionario o casi-estacionario

Incluyendo la hipótesis de ángulo de ataque del empuje igual a cero

$$\dot{x}_e = V\cos\chi$$

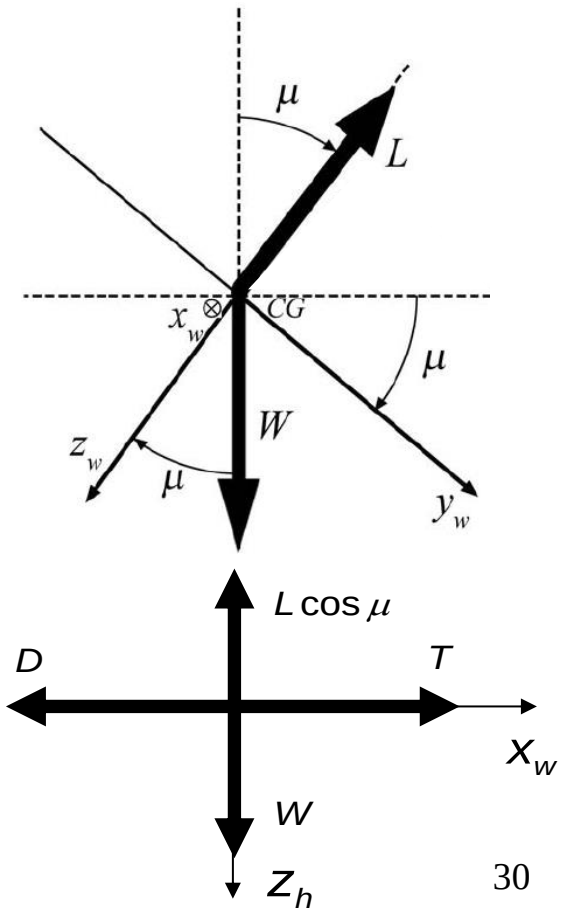
$$\dot{y}_e = V\sin\chi$$

$$T\cancel{\cos\varepsilon} - D = m\cancel{\dot{V}}$$

$$L\sin\mu + T\cancel{\sin\varepsilon}\sin\mu = mV\dot{\chi}$$

$$W - L\cos\mu - T\cancel{\sin\varepsilon}\cos\mu = 0$$

$$\dot{m} + \varphi = 0$$



- **5 variables de estado:** x_e, y_e, V, χ, m
- **3 variables de control:** α, μ, π

Referencias

- **Mecánica del vuelo, 2ª edición, M.A. Gómez Tierno, M. Pérez Cortés, C. Puentes Márquez, Ibergarceta Publicaciones, 2012**

  (Las figuras utilizadas en esta presentación han sido extraídas de esta referencia)

- **Introduction to Flight, Fifth Edition, J. D. Anderson, Jr, McGraw-Hill International Edition, 2005**